

DISEQUAZIONI ESPONENZIALI

Docente: Prof. Nicola Vigilante | Classe: Quarta I.T.T.

Per risolvere le disequazioni esponenziali si procede in maniera molto simile a quello che si sarebbe dovuto fare per risolvere le equazioni esponenziali.

Ricorda!

Per risolvere un'equazione esponenziale ci sono tre metodi:

- Metodo 1. **Uguaglianza delle stesse basi.** Si riconducono entrambi i membri alla stessa base. Data l'equazione $a^{f(x)} = b$, la base b può essere espresso come potenza in base a , ossia esiste un numero razionale k tale che $b = a^k$ ($a^{f(x)} = a^k$)
- Metodo 2. **Uso dei logaritmi.** Se non è possibile esprimere i due membri con la stessa base, si applica la definizione di logaritmo ($a^x = b \Leftrightarrow x = \log_a(b)$)
- Metodo 3. L'equazione esponenziale può essere trasformata in una equazione algebrica ponendo una nuova variabile temporanea $t = a^{f(x)}$.

Per le disequazioni esponenziali, la differenza con le equazioni sta nel passaggio dalla disequazione esponenziale alla disequazione algebrica tra gli esponenti:

Gli esponenziali con base $a > 1$ sono funzioni strettamente crescenti, pertanto **il verso della disequazione non cambia** (man mano che ci si sposta verso destra sull'asse X, ad un esponente più grande corrisponde un risultato più grande):

$$a^{f(x)} > a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) > g(x)$$

Esempi

$$\begin{array}{llll} 3^{2x+1} > 3^{-1} & \Leftrightarrow & 2x + 1 > -1 & \Leftrightarrow x > -1 \\ 3^{x+5} < 2^2 & \Leftrightarrow & x + 5 < 2 & \Leftrightarrow x < -3 \end{array}$$

Gli esponenziali con base $0 < a < 1$ sono funzioni strettamente decrescenti, pertanto **il verso della disequazione cambia** (man mano che ci si sposta verso destra sull'asse X, ad un esponente più grande corrisponde un risultato più piccolo):

$$a^{f(x)} > a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) < g(x)$$

Esempi

$$\begin{array}{llll} \frac{1}{4}^{2x+1} > \frac{1}{4}^7 & \Leftrightarrow & 2x + 1 < 7 & \Leftrightarrow x > 3 \\ \frac{1}{7}^{x+5} < \frac{1}{7}^{-10} & \Leftrightarrow & x + 5 > -10 & \Leftrightarrow x > -15 \end{array}$$

Esempio 1 $\sqrt[3]{2^{2x+2}} \geq \frac{1}{\sqrt{2^{2-x}}}$

$$2^{\frac{2x+2}{3}} \geq \frac{1}{2^{\frac{2-x}{2}}} \quad \Rightarrow \quad 2^{\frac{2x+2}{3}} \geq 2^{-\frac{2-x}{2}}$$

Essendo la base maggiore di 1, nel passare dalla disequazione esponenziale alla disequazioni algebrica tra gli esponenti *il verso viene preservato*

$$\frac{2x+2}{3} \geq -\frac{2-x}{2}$$

$$6 \cdot \left(\frac{2x+2}{3}\right) \geq 6 \cdot \left(-\frac{2-x}{2}\right) \quad \Rightarrow \quad 4x + 4 \geq -6 + 3x \quad \Rightarrow \quad x \geq -10$$

Esempio 2 $\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{x-2}{2}} \leq 27 \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^{1-x}$

Applichiamo le proprietà delle potenze per riscrivere la disequazione in modo più semplice (cercando di avere tutte le potenze con la stessa base)

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{x-2}{2}} \leq 3^3 \cdot \left(\frac{1}{3^2}\right)^{1-x} \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{x-2}{2}} \leq \left(\frac{1}{3}\right)^{-3} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{2(1-x)}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{x-2}{2}} \leq \left(\frac{1}{3}\right)^{-3+2(1-x)} \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{x-2}{2}} \leq \left(\frac{1}{3}\right)^{-3+2(1-x)}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{x-2}{2}} \leq \left(\frac{1}{3}\right)^{-2x-1}$$

Essendo la base minore di 1, nel passare dalla disequazione esponenziale alla disequazioni algebrica tra gli esponenti *il verso viene cambiato*

$$\frac{x-2}{2} \geq -2x-1 \quad \Rightarrow \quad x-2 \geq -4x-2 \quad \Rightarrow \quad x+4x \geq +2-2$$

$$\Rightarrow \quad x \geq 0$$

Esempio 3 $2^{2x} - 5 \cdot 2^x + 6 \geq 0$

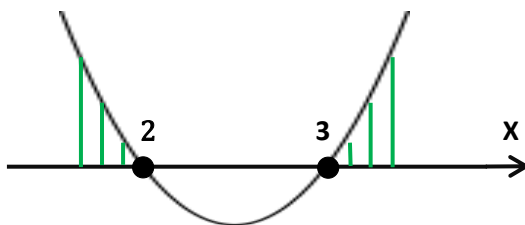
Per le proprietà delle potenze, sapendo che: $2^{2x} = (2^2)^x = (2^x)^2$

l'equazione esponenziale può essere trasformata in una equazione algebrica ponendo:

$$2^x = t \text{ (cambio di variabile)}$$

$$t^2 - 5t + 6 \geq 0$$

$$(t - 3) \cdot (t - 2) \geq 0$$



La disequazione è soddisfatta quando il grafico della parabola sta al di sopra dell'asse delle ascisse x , pertanto la soluzione risulta essere:

$$t \leq 2 \cup t \geq 3$$

Ripristinando la variabile, avendo posto $2^x = t$ sarà:

$$2^x \leq 2 \cup 2^x \geq 3$$

$$2^x \leq 2^1 \cup 2^x \geq 3$$

Essendo la base maggiore di 1, nel passare dalla disequazione esponenziale alla disequazioni algebrica tra gli esponenti *il verso viene preservato*

$$x \leq 1 \cup x \geq \log_2 3$$