

DISEQUAZIONI LOGARITMICHE

Docente: Prof. Nicola Vigilante | **Classe:** Quarta I.T.T.

Per risolvere le disequazioni logaritmiche si utilizzano le stesse tecniche utilizzate per le equazioni logaritmiche:

- Proprietà dei logaritmi
- Formula del cambiamento di base
- Cambio di variabile

Per le equazioni logaritmiche, l'obiettivo finale era di arrivare, dopo qualche passaggio, ad avere **due possibili casi**:

1. $\log_a f(x) = \log_a g(x) \Rightarrow f(x) = g(x)$ (se **gli algoritmi hanno la stessa base a**, posso uguagliare i loro argomenti)
2. $\log_a f(x) = c \Rightarrow f(x) = a^c$ (se **al secondo membro dell'equazione è presente solo un numero c**, posso applicare la definizione di logaritmo: $f(x) = a^c$)



Ricorda!

In un'equazione logaritmica elementare $\log_a b = x$, il $\log_a b$ è quell'**esponente x** che bisogna dare alla **base a** per ottenere l'**argomento b** del logaritmo.

Per le disequazioni logaritmiche, bisogna osservare la **base a** per decidere come proseguire:

$\log_a f(x) > c$ se **$a > 1$** si ottiene **$f(x) > a^c$ (il verso resta lo stesso)**
 se **$0 < a < 1$** si ottiene **$f(x) < a^c$ (il verso cambia)**

Se fosse $\log_a f(x) < c$ vale la stessa cosa:

se **$a > 1$** si ottiene **$f(x) < a^c$ (il verso resta lo stesso)**
 se **$0 < a < 1$** si ottiene **$f(x) > a^c$ (il verso cambia)**



Ricorda!

Il logaritmo esiste se la base **$a > 1$** , **$a \neq 1$** e se gli **argumenti $f(x)$** dei logaritmi siano **positivi**.

Pertanto, nel risolvere una disequazione, affinché il logaritmo sia definito, devo ricordarmi di imporre: **$f(x) > 0$ (condizioni di esistenza)**

ESEMPIO 1

$$\log_2(2x - 4) \leq 3$$

Condizioni di esistenza (C.E.): $2x - 4 > 0 \Rightarrow x > 2$

$$\log_a f(x) \leq c \Rightarrow f(x) \leq a^c$$

3 è l'esponente che dobbiamo dare alla base 2 per ottenere $(2x - 4)$

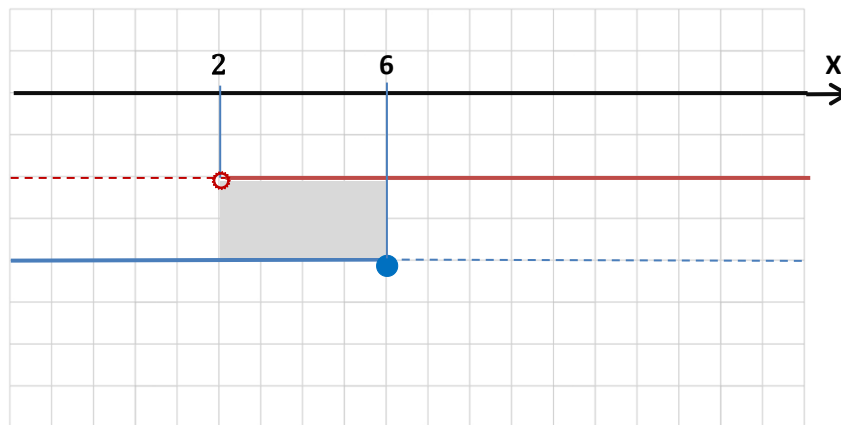
$$2x - 4 \leq 2^3$$

(il verso viene preservato poichè la base risulta $a > 1$)

$$2x - 4 \leq 8$$

$$x \leq 6$$

Tale risultato deve rispettare le condizioni di esistenza, pertanto:



La soluzione della disequazione risulterà essere:

$$S = \{x \in \mathbb{R} \text{ tale che } 2 < x \leq 6\}$$

ESEMPIO 2

$$\log_{\frac{1}{2}}(x - 1) > -1$$

Condizioni di esistenza (C.E.): $x - 1 > 0 \Rightarrow x > 1$

$$\log_a f(x) \leq c \Rightarrow f(x) \leq a^c$$

$$x - 1 < \left(\frac{1}{2}\right)^{-1}$$

(il verso cambia poichè la base risulta $0 < a < 1$)

$$x - 1 < 2 \Rightarrow x < 3 \Rightarrow \text{Tenendo conto delle condizioni di esistenza sarà: } 1 < x < 3$$

$$\log_3(x-1) + \log_3(x+1) > 3\log_3(2)$$

🧠 Ricordando le proprietà dei logaritmi!

1. $\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)$
2. $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y)$
3. $\log_a(x^y) = y \cdot \log_a(x)$

$$\log_3[(x-1)(x+1)] > \log_3(2^3)$$

$$\log_a f(x) = \log_a g(x) \Rightarrow f(x) = g(x)$$

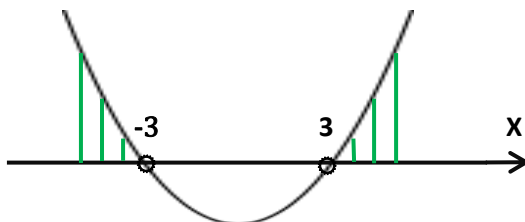
se **gli algoritmi hanno la stessa base a**, posso uguagliare i loro argomenti

$$(x-1)(x+1) > 2^3$$

(il verso viene preservato poichè la base risulta $a > 1$)

$$(x^2 - 1) > 8$$

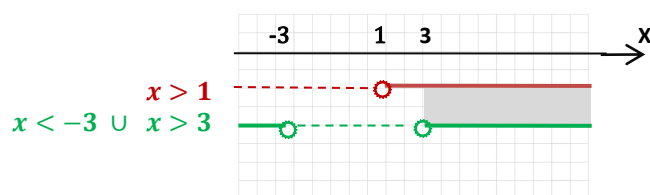
$$x^2 - 9 > 0$$



La soluzione della disequazione di secondo grado risulterà: $x < -3 \cup x > 3$

Non dobbiamo dimenticare di imporre che i logaritmi indicati esistano!

Condizioni di esistenza (C.E.): $\begin{cases} x-1 > 0 \\ x+1 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x > -1 \end{cases} \Rightarrow x > 1$



Tenendo conto delle condizioni di esistenza, la soluzione della disequazione risulterà:

$$S = \{x \in \mathbb{R} \text{ tale che } x > 3\}$$

$$\log_2^2(x) - 6\log_2(x) + 8 > 0$$

Dobbiamo imporre che i logaritmi indicati esistano!

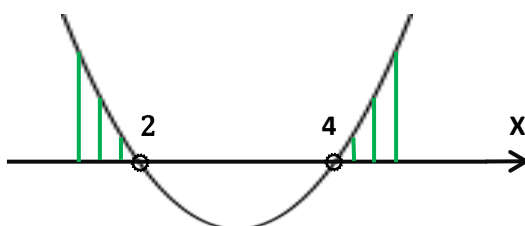
Condizioni di esistenza (C.E.): $x > 0$

Utilizzo il cambio di variabile:

$$\text{chiamo } t = \log_2(x)$$

$$t^2 - 6t + 8 = 0$$

$$(t - 2)(t - 4) > 0$$



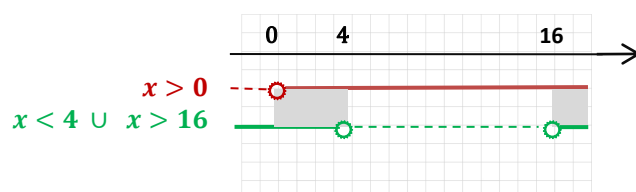
$$t < 2 \cup t > 4$$

$$\log_2(x) < 2 \cup \log_2(x) > 4$$

(il verso viene preservato poichè la base risulta $a > 1$)

$$x < 2^2 \cup x > 2^4$$

$$x < 4 \cup x > 16$$



Tenendo conto delle condizioni di esistenza, la soluzione della disequazione risulterà:

$$S = \{x \in \mathbb{R} \text{ tale che } 0 < x < 4 \cup x > 16\}$$