

EQUAZIONI ESPONENZIALI

Docente: Prof. Nicola Vigilante | **Classe:** Quarta I.T.T.

Un'equazione esponenziale è un'equazione in cui l'**incognita X** (o una sua funzione) compare all'esponente di una o più potenze. Di seguito, alcuni esempi:

$$2^{2-8x} = 4^{3x+1}$$

$$3^{x^2+x} = 1$$

$$2^x = 5$$

$$5^{2x^2} = 3$$

In particolare, l'equazione $a^{f(x)} = b$ si dice **equazione esponenziale elementare**, dove la base a è un numero positivo diverso da 1 ($a > 0$, $a \neq 1$).

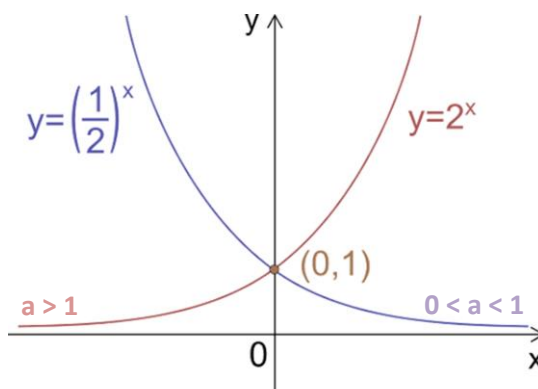
Una semplice analisi preliminare ci assicura che l'equazione esponenziale sarà:

- **impossibile** se $b \leq 0$ (perché una potenza a base positiva restituisce sempre un numero maggiore di zero);
- **determinata** se $b > 0$ (l'equazione ammette una e una sola soluzione).

🔍 Perché non può essere $b \leq 0$?

Per definizione, una funzione esponenziale è una relazione matematica del tipo $y = a^x$ dove la **base a** deve essere $a > 0$ e $a \neq 1$. Se la base fosse negativa, ad esempio $(-2)^x$, non sarebbe definita per alcuni valori reali dell'esponente x , ad esempio $x = \frac{1}{2}$, che equivale alla radice quadrata di un numero negativo ($\sqrt{-2}$). Pertanto, se $a^x > 0$, l'equazione esponenziale $a^x = b$ ammette soluzioni solo se $b > 0$.

🔍 Rappresentazione grafica della Funzione Esponenziale $y = a^x$



Nell'ipotesi $b > 0$ ci sono tre metodi per risolvere le equazioni esponenziali elementari:

- Metodo 1. **Uguaglianza delle stesse basi.** Si riconducono entrambi i membri alla stessa base. Data l'equazione $a^{f(x)} = b$, la base b può essere espresso come potenza in base a , ossia esiste un numero razionale k tale che $b = a^k$ ($a^{f(x)} = a^k$)
- Metodo 2. **Uso dei logaritmi.** Se non è possibile esprimere i due membri con la stessa base, si applica la definizione di logaritmo ($a^x = b \Leftrightarrow x = \log_a(b)$)
- Metodo 3. L'equazione esponenziale può essere trasformata in una equazione algebrica ponendo una nuova variabile temporanea $t = a^{f(x)}$.

Esempio 1 $2^{2-8x} = 4^{3x+1}$

La base 4 può essere espressa come potenza di base 2 (Metodo 1).

$$2^{2-8x} = 4^{3x+1} \Rightarrow 2^{2-8x} = (2^2)^{3x+1} \Rightarrow 2^{2-8x} = 2^{2(3x+1)}$$

$$2 - 8x = 2(3x + 1) \Rightarrow 2(1 - 4x) = 2(3x + 1)$$

$$(1 - 4x) = (3x + 1) \Rightarrow 1 - 4x = 3x + 1 \Rightarrow 1 - 1 = 3x + 4x$$

$$7x = 0 \Rightarrow x = \frac{0}{7} \Rightarrow x = 0$$

Esempio 2 $\sqrt[3]{2^{2x+2}} = \frac{1}{\sqrt{2^{2-x}}} \Rightarrow 2^{\frac{2x+2}{3}} = \frac{1}{2^{\frac{2-x}{2}}} \Rightarrow 2^{\frac{2x+2}{3}} = 2^{-\frac{2-x}{2}}$

Considerando che le due potenze hanno la stessa base, per essere uguali devono essere uguali anche i loro esponenti, quindi si passa dall'equazione esponenziale ad un'equazione algebrica tra gli esponenti:

$$\frac{2x+2}{3} = -\frac{2-x}{2} \Rightarrow 4x + 4 = -6 + 3x \Rightarrow 4x - 3x = -6 - 4 \Rightarrow x = -10$$

Pertanto, tutte quelle equazioni esponenziali che, dopo alcuni passaggi, sono riconducibili alla forma $a^{f(x)} = a^{g(x)}$ si risolvono imponendo $f(x) = g(x)$

Esempio 3 $3^{x+3} - 2 \cdot 3^{x+2} = \frac{20}{5^{-x}} + 5^{x+1}$

$$3^x \cdot 3^3 - 2 \cdot 3^x \cdot 3^2 = 20 \cdot 5^x + 5^x \cdot 5^1$$

$$27 \cdot 3^x - 18 \cdot 3^x = 20 \cdot 5^x + 5 \cdot 5^x \Rightarrow 9 \cdot 3^x = 25 \cdot 5^x$$

Conviene portare tutti gli esponenziali al primo membro e tutti i numeri al secondo membro:

$$\frac{3^x}{5^x} = \frac{25}{9} \Rightarrow \left(\frac{3}{5}\right)^x = \left(\frac{5}{3}\right)^2 \Rightarrow \left(\frac{3}{5}\right)^x = \left(\frac{3}{5}\right)^{-2} \Rightarrow x = -2$$

Pertanto, tutte quelle equazioni esponenziali che, dopo alcuni passaggi, sono riconducibili alla forma $m \cdot a^x = n \cdot b^x$ conviene trasformarla ottenendo l'equazione $\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{n}{m}$.

Esempio 4 $4^{x+1} + 3 \cdot 2^x - 7 = 0$

$$(2^2)^{x+1} + 3 \cdot 2^x - 7 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2^{2x+2} + 3 \cdot 2^x - 7 = 0$$

$$2^{2x} \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^x - 7 = 0$$

Per le proprietà delle potenze, sapendo che: $2^{2x} = (2^2)^x = (2^x)^2$

l'equazione esponenziale può essere trasformata in una equazione algebrica ponendo:

$$2^x = t$$

$$t^2 \cdot 2^2 + 3 \cdot t - 7 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 4t^2 + 3t - 7 = 0$$

Usando la formula risolutiva delle equazioni di secondo grado mi trovo le due soluzioni:

$$t_1 = -\frac{7}{4} ; t_2 = 1$$

Tornando alla variabile x ottengo:

$$\text{Per } t_1 = -\frac{7}{4} \quad \Leftrightarrow \quad 2^x = -\frac{7}{4} \quad (\text{non accettabile})$$

$$\text{Per } t_2 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad 2^x = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0$$

Esempio 5 $3^{2x} - 12 \cdot 3^x + 27 = 0$

Chiamo $3^x = t$

$$t^2 - 12 \cdot t + 27 = 0$$

$$t_{1,2} = \frac{12 \pm \sqrt{144 - 4 \cdot (1) \cdot (27)}}{2 \cdot 1} = \frac{12 \pm \sqrt{36}}{2} = \frac{12 \pm 6}{2}$$

$$t_1 = 3 \quad \Leftrightarrow \quad 3^x = 3 \quad \Leftrightarrow \quad x = 1$$

$$t_2 = 9 \quad \Leftrightarrow \quad 3^x = 9 \quad \Leftrightarrow \quad 3^x = 3^2 \quad \Leftrightarrow \quad x = 2$$

Esempio 6 $2^x = 8$

$$\Rightarrow x = \log_2 8 = 3 \text{ (utilizzando il Metodo 2)}$$

Qual è il valore che deve assumere la x affinché $2^x = 8$.

Essendo 8 una potenza di 2, precisamente è 2^3 , l'esponente che dobbiamo dare ad x per ottenere 8 è 3.

 **Relazione tra esponenziale e logaritmo**

$$a^x = b \Leftrightarrow \log_a b = x$$

Il logaritmo in **base a** di un **numero b** è l'**esponente x** a cui bisogna elevare la **base a** per ottenere l'argomento **b**.

 **Uso della Calcolatrice**

La calcolatrice è necessaria per i numeri decimali o le basi non immediate. Di solito trovi due tasti principali:

- **log**: per il logaritmo decimale in **base 10**;
- **ln**: per il logaritmo naturale in base **e** (**numero di Nepero**).

Posso calcolare un logaritmo con qualsiasi base usando la formula: $\log_a(b) = \frac{\log(b)}{\log(a)}$

In maniera alternativa:

$$2^x = 8 \Rightarrow 2^x = 2^3 \Rightarrow x = 3 \text{ (utilizzando il Metodo 1)}$$

Esempio 7 $2^x = 5$

Non è possibile scrivere 5 come potenza di 2, quindi per risolvere l'equazione esponenziale dobbiamo passare dall'esponenziale al logaritmo:

$$x = \log_2 5 \text{ (posso usare solo il Metodo 2)}$$

Esempio 8 $5^{2x^2} = 3$

$$\log_5 3 = 2x^2 \Rightarrow 2x^2 = \log_5 3 \Rightarrow x^2 = \frac{\log_5 3}{2}$$

$$x = \pm \sqrt{\frac{\log_5 3}{2}}$$