

EQUAZIONI LOGARITMICHE

Docente: Prof. Nicola Vigilante | **Classe:** Quarta I.T.T.

L'equazione logaritmica $\log_a b = x$ nasce direttamente come l'operazione inversa dell'equazione esponenziale $a^x = b$ risolvendo il problema di trovare un **esponente x** sconosciuto quando si conoscono la **base a** e il **risultato b**. In pratica, il logaritmo è semplicemente un modo per riscrivere la stessa relazione dell'esponenziale, ma mettendo l'incognita x in primo piano.

In un'equazione esponenziale elementare $a^x = b$ cerchi quel **numero x** che, dato come esponente ad una **base a**, permette di ottenere un **risultato b**.

In un'equazione logaritmica elementare $\log_a b = x$, il $\log_a b$ è quell'**esponente x** che bisogna dare alla **base a** per ottenere l'**argomento b** del logaritmo.

Se $a^x = b$ con **a** e **b** noti,

allora la x è il logaritmo in base a di b:

$$a^x = b \Leftrightarrow x = \log_a b$$

a = base , b = argomento

$\log_7(49)$ A cosa devo elevare 7 per ottenere 49? $\Rightarrow \log_7 49 = 2$

$\log_2\left(\frac{1}{2}\right)$ A cosa devo elevare 2 per ottenere $\frac{1}{2}$? $\Rightarrow \log_2\left(\frac{1}{2}\right) = -1$

$\log_2\left(\frac{1}{\sqrt{8}}\right)$ A cosa devo elevare 2 per ottenere $\frac{1}{\sqrt{8}}$? $\Rightarrow \log_2\left(\frac{1}{\sqrt{8}}\right) = -\frac{3}{2}$

$$\hookrightarrow \frac{1}{\sqrt{8}} = \frac{1}{\sqrt{2^3}} = \frac{1}{2^{\frac{3}{2}}} = 2^{-\frac{3}{2}} \hookrightarrow$$

Nota bene: se b non è una potenza ad esponente razionale di a, il $\log_a b$ sarà un **numero irrazionale**.

$\log_2(3)$ $\Rightarrow$ A cosa devo elevare 2 per ottenere 3?

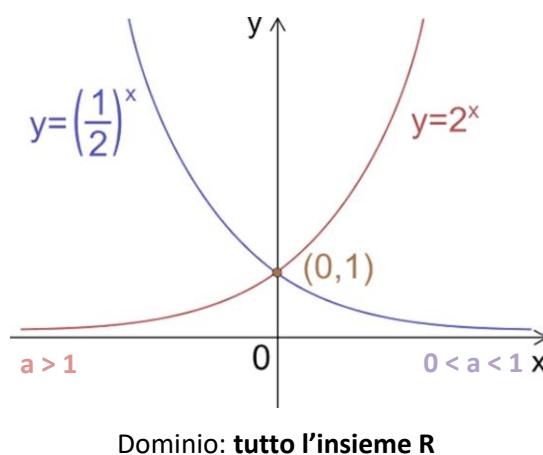
Utilizzando la calcolatrice $\log_2 3 \approx 1,5849 \dots$

Non riusciamo a esprimere 3 come una potenza di base 2, pertanto il risultato del logaritmo sarà un numero irrazionale.

📌 La Funzione Esponenziale

Per definizione, una funzione esponenziale è una relazione matematica del tipo $y = a^x$ dove la **base a** deve essere: $a > 0$ e $a \neq 1$. Se la base fosse negativa, ad esempio $(-2)^x$, non sarebbe definita per alcuni valori reali dell'esponente x , ad esempio $x = \frac{1}{2}$, che equivale alla radice quadrata di un numero negativo ($\sqrt{-2}$). Pertanto, se $a^x > 0$, l'equazione esponenziale $a^x = b$ ammette soluzioni solo se $b > 0$.

📌 Rappresentazione grafica della Funzione Esponenziale $y = a^x$



Poiché il logaritmo deriva dall'esponenziale (la cui base è sempre positiva e il cui risultato è sempre positivo), dobbiamo rispettare **tre regole fondamentali**:

- Argomento positivo: $\log_a b$ è definito solo per $b > 0$
- Base positiva: La base a deve essere strettamente maggiore di zero $a > 0$.
- Base diversa da uno: La base a non può essere uguale a uno ($a \neq 1$)

Un'equazione logaritmica è un'equazione in cui l'**incognita x** compare nell'argomento o nella base di un logaritmo.

📌 Caratteristiche della Funzione Logaritmica

La funzione logaritmica è un'espressione del tipo $y = \log_a x$, dove la **base a** è un numero reale costante maggiore di zero ($a > 0$) e diverso da uno, mentre l'**argomento x** è variabile.

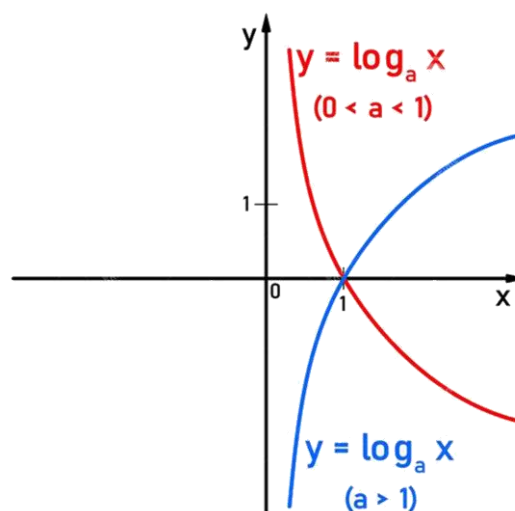
Se $a > 1$, $y = \log_a x$ è una **funzione strettamente crescente**

se $0 < a < 1$, $y = \log_a x$ è una **funzione strettamente decrescente**

In entrambi i casi abbiamo funzioni definite solo per $x > 0$ (il grafico sta a destra dell'asse Y)

In entrambi i casi, i grafici passano per il punto $(1, 0)$ **$\log_a 1 = 0$** (**zero** è l'esponente che devo dare ad a per ottenere 1).

📌 Rappresentazione grafica della Funzione Logaritmica $y = \log_a x$



Dominio: Insieme dei numeri reali strettamente positivi $\mathbb{R}^+$ ($x > 0$)

PROPRIETÀ DEI LOGARITMI

1. $\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)$
2. $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y)$
3. $\log_a(x^y) = y \cdot \log_a(x)$

Tutte le proprietà citate sono valide a condizione che la **base a** sia **positiva e diversa da 1** e che gli **argomenti dei logaritmi** siano **positivi (condizione di esistenza)**.

- $\log_3(6) = \log_3(3 \cdot 2) = \log_3(3) + \log_3(2)$ Proprietà 1 **applicata correttamente!**
- $\log_3(6) = \log_3[(-3) \cdot (-2)] = \log_3(-3) + \log_3(-2)$ **Non applicabile!**

Nota

$\log_a(x \pm y)$, $\log_a(x) \cdot \log_a(y)$, $\frac{\log_a x}{\log_a y}$ **non godono di particolari proprietà! Pertanto non si possono rimaneggiare, ma vanno lasciati così come sono!**

Esempio di applicazione delle proprietà dei logaritmi:

Scrivere sotto forma di un unico logaritmo $\log_5 6 - \frac{1}{2}\log_5 3 + \log_5 2$

$$\begin{aligned}\text{Proprietà 3} \Rightarrow \log_5 6 - \log_5 3^{\frac{1}{2}} + \log_5 2 \\ = \log_5 6 - \log_5 \sqrt{3} + \log_5 2\end{aligned}$$

$$\text{Proprietà 1} \Rightarrow \log_5 6 \cdot 2 - \log_5 \sqrt{3}$$

$$\text{Proprietà 2} \Rightarrow \log_5 \left(\frac{12}{\sqrt{3}}\right) = \log_5(4\sqrt{3}) \text{ (razionalizzando)}$$

CALCOLO DEL LOGARITMO CON LA CALCOLATRICE

Le calcolatrici riconoscono solo il logaritmo in **base 10 (log)** o il logaritmo naturale in **base e (ln)**. Se hai una base diversa è possibile utilizzare la formula del cambiamento di base.

$$\text{Formula del cambio di base: } \log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

Alcuni esempi:

$$\log_2 3 = \frac{\log_c 3}{\log_c 2} \quad \log_7 13 = \frac{\log_4 13}{\log_4 7} \quad \log_5 4 = \frac{\ln 4}{\ln 5}$$

Nota: Il logaritmo naturale (o logaritmo neperiano: $\log_e b$) è un logaritmo che ha come base il **numero di Nepero**. Il **numero di Nepero** (indicato con la lettera **e**) è una delle costanti matematiche più importanti, con un valore approssimato a cinque cifre decimali pari a 2,71828. Insieme al pi greco (π), è fondamentale in matematica, fisica ed economia.

EQUAZIONI LOGARITMICHE

Come si risolvono? Utilizzando:

- Proprietà dei logaritmi
- Formula del cambiamento di base
- Cambio di variabile

L'obiettivo è arrivare, dopo qualche passaggio, ad avere

1. $\log_a f(x) = \log_a g(x) \Rightarrow f(x) = g(x)$ (se gli algoritmo hanno la stessa base, posso uguagliare i loro argomenti)
2. $\log_a f(x) = c \Rightarrow f(x) = a^c$ (se al secondo membro dell'equazione è presente solo numero applico: $f(x) = a^c$)

Nota bene: bisogna sempre **imporre** che i logaritmi $\log_a b$ esistano!!! Pertanto, devono valere le condizioni di esistenza: argomento $b > 0$ e le basi $a > 0$ e $a \neq 1$

ESEMPIO 1

$$\log_2(x+1) + \log_2(x-1) - 3 = 0$$

$$\text{Condizioni di esistenza (C.E.): } \begin{cases} x+1 > 0 \\ x-1 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > -1 \\ x > 1 \end{cases} \Rightarrow x > 1$$

$$\log_2(x+1) + \log_2(x-1) = 3$$

$$\text{Proprietà 1} \Rightarrow \log_2[(x+1)(x-1)] = 3$$

$\log_a f(x) = c \Rightarrow f(x) = a^c$

3 è l'esponente che dobbiamo dare alla base 2 per ottenere $(x+1)(x-1)$

$$(x+1)(x-1) = 2^3$$

$$x^2 - 1 = 8$$

$$x^2 - 9 = 0$$

$$x_1 = 3$$

$$x_2 = -3 \text{ (non accettabile per le condizioni di esistenza)}$$

pertanto:

$$x = 3 \text{ (Unica soluzione reale dell'equazione)}$$

ESEMPIO 2

$$2\log_2(x+1) + \log_4(x+1) = 5$$

Dobbiamo imporre che i logaritmi indicati esistano!

$$\text{Condizioni di esistenza (C.E.): } x+1 > 0 \Rightarrow x > -1$$

Avendo basi diverse applichiamo la **formula del cambiamento di base**:

$$2 \frac{\log_4(x+1)}{\log_4 2} + \log_4(x+1) = 5$$

$$2 \frac{\log_4(x+1)}{\frac{1}{2}} + \log_4(x+1) = 5$$

$$4\log_4(x+1) + \log_4(x+1) = 5$$

$$5\log_4(x+1) = 5$$

$$\log_4(x+1) = 1$$

$\log_a f(x) = c \Rightarrow f(x) = a^c$

Per la definizione di logaritmo:

1 è l'esponente che dobbiamo dare alla base 4 per ottenere $(x+1)$

$$(x+1) = 4^1 \Rightarrow x = 3$$

ESEMPIO 3

$$\log_2^2(x+2) = 4 - 3\log_2(x+2)$$

Dobbiamo imporre che i logaritmi indicati esistano!

$$\text{Condizioni di esistenza (C.E.): } x+2 > 0 \Rightarrow x > -2$$

Utilizzo il cambio di variabile:

chiamo $t = \log_2(x+2)$

$$t^2 = 4 - 3t$$

$$t^2 + 3t - 4 = 0$$

$$(t+4)(t-1) = 0$$

$$t_1 = 1, t_2 = -4$$

$$\text{Per } t_1 = 1 \quad \log_2(x+2) = 1 \Rightarrow \text{per def. di logaritmo } x+2 = 2^1 \Rightarrow x = 0$$

$$\text{Per } t_2 = -4 \quad \log_2(x+2) = -4 \Rightarrow \text{per def. di logaritmo } x+2 = 2^{-4} \Rightarrow x = -\frac{31}{16}$$

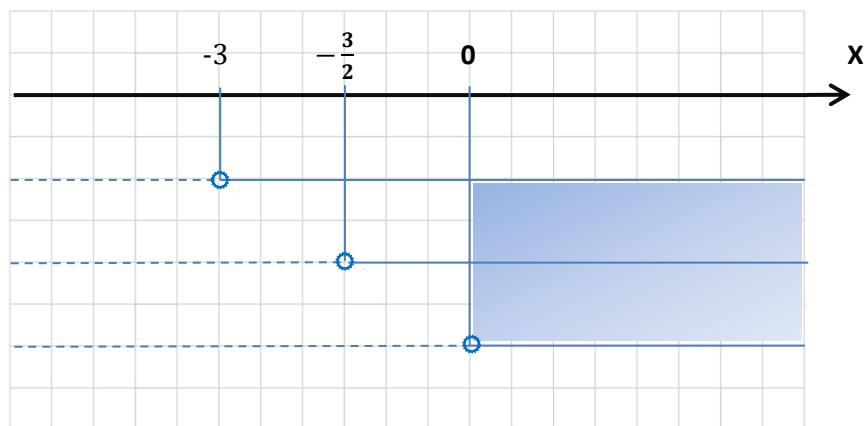
Osservando le condizioni di esistenza ($x > -2$) entrambe le soluzioni sono accettabili.

$$\log(x) + \log(x + 3) = \log 2 + \log(2x + 3)$$

Dobbiamo imporre che i logaritmi indicati esistano!

Condizioni di esistenza (C.E.):

$$\begin{cases} x > 0 \\ x + 3 > 0 \\ 2x + 3 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x > -3 \\ x > -\frac{3}{2} \end{cases}$$



$$\text{C.E.} \Rightarrow x > 0$$

Semplifichiamo l'equazione applicando le proprietà dei logaritmi:

$$\text{Proprietà 1} \Rightarrow \log [x \cdot (x + 3)] - \log [2 \cdot (2x + 3)]$$

Due logaritmi che hanno la stessa base sono uguali se sono uguali i loro argomenti:

$$x \cdot (x + 3) = 2 \cdot (2x + 3)$$

$$x^2 + 3x = 4x + 6$$

$$x^2 - x - 6 = 0$$

Considerando l'equazione generica di un'equazione di secondo grado

$$ax^2 + bx + c = 0$$

ne deriva che: $a = 1$; $b = -1$; $c = -6$

$$\Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot c = (-1)^2 - 4 \cdot (1) \cdot (-6) = 1 + 24 = 25$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{25}}{2 \cdot 1}$$

$$x_1 = \frac{1+5}{2} = \frac{6}{2} = 3 \quad x_2 = \frac{1-5}{2} = \frac{-4}{2} = -2 \text{ (non accettabile)}$$

Confrontiamo le soluzioni trovate con le **condizioni di esistenza** ($x > 0$) pertanto l'unica soluzione accettabile sarà $x_1 = 3$ poiché $x_2 = -2$ non rispetta le condizioni di esistenza.

$$\log_3^2(x) - 2\log_3(x) - 3 = 0$$

Dobbiamo imporre che i logaritmi indicati esistano!

Condizioni di esistenza (C.E.): $x > 0$

Utilizzo il cambio di variabile:

$$\text{chiamo } t = \log(x)$$

$$t^2 - 2t - 3 = 0$$

Posso scomporre il trinomio caratteristico (o trinomio notevole) cercando due numeri m e n in modo tale che rispettino due condizioni fondamentali:

$$m + n = -2$$

$$m \cdot n = -3$$

Tali numeri sono $m = -3$ ed $n = +1$ pertanto:

$$(t - 3)(t + 1) = 0$$

$$t_1 = 3, \quad t_2 = -1$$

$$\text{Per } t_1 = 3 \quad \log_3(x) = t \quad \Leftrightarrow \quad \log_3(x) = 3$$

per def. di logaritmo (esponente che bisogna dare alla base per ottenere l'argomento):

$$x = 3^3$$

$$\Leftrightarrow x = 27$$

$$\text{Per } t_2 = -1 \quad \log_3(x) = -1$$

$$\text{per def. di logaritmo: } x = 3^{-1}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{3}$$

Osservando le **condizioni di esistenza** ($x > 0$) entrambe le soluzioni sono accettabili.

$$\log_{10} \left(\frac{x-9}{4x} \right) = 0$$

Quando al secondo membro ci ritroviamo solo un **numero c** ($\log_a f(x) = c$) è opportuno risolvere l'equazione attraverso la seguente formula:

$$f(x) = a^c$$

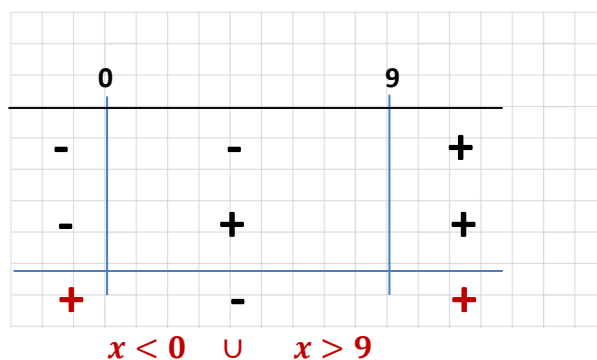
Prima di tutto dobbiamo imporre che i logaritmi indicati esistano!

Condizioni di esistenza (C.E.): $\frac{x-9}{4x} > 0$

È una disequazione frazionaria (compare la x al denominatore), pertanto dobbiamo eseguire lo **studio del segno**:

$$N > 0 \Rightarrow x - 9 > 0 \Rightarrow x > 9$$

$$D > 0 \Rightarrow 4x > 0 \Rightarrow x > 0$$



Tornando all'equazione logaritmica, sarà:

$$\log_{10} \left(\frac{x-9}{4x} \right) = 0 \Rightarrow \frac{x-9}{4x} = 10^0 \Rightarrow \frac{x-9}{4x} = 1$$

Risolviamo l'equazione frazionaria (dovremmo porre C.E. $x \neq 0$;

ma nelle precedenti condizioni di esistenza lo zero è già stato escluso):

$$\begin{aligned} \frac{x-9}{4x} = 1 &\Rightarrow \frac{x-9}{4x} = \frac{4x}{4x} \Rightarrow x-9 = 4x \Rightarrow -3x = 9 \\ &\Rightarrow x = -3 \end{aligned}$$

Osservando le **condizioni di esistenza** ($x < 0 \cup x > 9$) possiamo dire che la soluzione trovata è accettabile.