

Scomposizioni

Docente: Prof. Nicola Vigilante | **Classe:** Seconda I.T.T.

L'espressione scomposizione di un polinomio in fattori significa esprimere un dato polinomio come prodotto di due o più fattori polinomiali di grado inferiore. La scomposizione dei polinomi è utile nei seguenti casi:

- **Risoluzione di equazioni:** Permette di applicare la legge dell'annullamento del prodotto; se un polinomio scomposto è uguale a zero, basta porre ogni singolo fattore uguale a zero per trovare le soluzioni.
- **Semplificazione di frazioni algebriche:** Riduce i polinomi al numeratore e al denominatore in fattori per semplificare le frazioni e renderle più facili da calcolare.
- **Calcolo di MCD e mcm:** Aiuta a trovare il **Massimo Comune Divisore** e il **minimo comune multiplo** tra polinomi in modo analogo alla scomposizione in numeri primi.
- **Studio del segno:** Semplifica lo studio delle disequazioni frazionarie e permette di analizzare il segno di ciascun fattore separatamente.

Per svolgere la scomposizione di un polinomio si possono applicare vari metodi. La scelta del metodo dipende sia dal numero di termini del polinomio, sia dalla forma con cui esso si presenta, inoltre bisogna tenere a mente che non tutti i polinomi sono scomponibili (esempio: $x^2 + y^2$ non è scomponibile nel campo dei numeri reali; un trinomio $ax^2 + bx + c$ non è scomponibile in R se il discriminante (delta) è negativo).

Nelle tabelle seguenti vengono illustrati i principali metodi di scomposizione dei polinomi in fattori irriducibili.

Raccoglimento totale a fattor comune	$a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c)$
Scomporre a fattore comune vuol dire calcolare il massimo comune divisore (MCD) tra i monomi di un polinomio e moltiplicare così il MCD per tutto ciò che non è in comune nel polinomio	• $15x + 30 = 15 \cdot (x + 2)$ • $15x^2y - 20axy + 35x^4y^2 = 5xy \cdot (3x - 4a + 7x^3y)$ • $12a^4b^2 - 8a^2b + 2a^2 = 2a^2 \cdot (6a^2b^2 - 4b + 1)$



Il raccoglimento totale è il primo metodo da usare quando dobbiamo scomporre un polinomio.

Quando ci troviamo di fronte ad un polinomio, talvolta non è possibile fare un raccoglimento totale, allora dobbiamo valutare se è possibile fare un raccoglimento parziale, cioè vedere se dei termini, a gruppi di 2 o di 3 o anche più, hanno in comune dei fattori.

Raccoglimento parziale	$ab + ac + nb + nc = a(b + c) + n(b + c) = (a + n)(b + c)$
Quando non esiste un fattore (numero o lettera) comune a tutti i monomi, possiamo analizzare se ci sono due monomi che hanno in comune uno o più fattori.	$3a^2b - 2a + 12ab - 8$ il primo e il terzo monomio hanno in comune 3ab, mentre il secondo e il quarto monomio hanno in comune -2 $3a^2b - 2a + 12ab - 8 = 3ab(a + 4) - 2(a + 4)$ $= (a + 4)(3ab - 2)$ Altro esempio: $2xy + 2xz + 3y + 3z = 2x(y + z) + 3(y + z) = (2x + 3)(y + z)$

Differenza di quadrati	$a^2 - b^2 = (a + b) \cdot (a - b)$
La differenza di due quadrati è un prodotto notevole in cui la sottrazione di due termini al quadrato si scompone in una somma per una differenza.	$9x^2 - 4 = (3x + 2) \cdot (3x - 2)$ $a^4 - 81b^6 = (a^2 + 9b^3) \cdot (a^2 - 9b^3)$ $x^2 - 1 = (x + 1) \cdot (x - 1)$

Somma di due cubi	$a^3 + b^3 = (a + b) \cdot (a^2 - ab + b^2)$
Sono presente due termini al cubo	$x^3 + 27 = (x + 3) \cdot (x^2 - 3x + 9)$ $8x^3 + 27 = (2x + 3) \cdot (4x^2 - 6x + 9)$ $8x^3 + 27y^3 = (2x + 3y) \cdot (4x^2 - 6xy + 9y^2)$

Differenza di due cubi	$a^3 - b^3 = (a - b) \cdot (a^2 + ab + b^2)$
Sono presente due termini al cubo	$x^3 - 27 = (x - 3) \cdot (x^2 + 3x + 9)$ $8x^3 - 27 = (2x - 3) \cdot (4x^2 + 6x + 9)$ $\frac{125}{8} - x^3 = \left(\frac{5}{2} - x\right) \cdot \left(\frac{25}{4} + \frac{5}{2}x + x^2\right)$

Quadrato di un binomio	$a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2$
Sono presente tre termini al cubo	$9x^2 + 6x + 1 = (x + 3)^2$ $x^2 - 4x + 4 = (x - 2)^2$ $x^2y^2 + 2xy + 1 = (xy + 1)^2$

Trinomio Notevole (con $a = 1$)	$ax^2 + sx + p = (x + m) \cdot (x + n)$
Trovare due numeri m ed n tali che: $m + n = s$ $m \cdot n = p$	$x^2 - 5x + 6$ Devo trovare due numeri m ed n che sommati danno -5 e moltiplicati tra loro danno $+6$. Tali numeri sono -2 e -3: $(-2) + (-3) = -5$ $(-2) \cdot (-3) = +6$ $x^2 - 5x + 6 = (x - 2) \cdot (x - 3)$

Trinomio Notevole (con $a \neq 1$)	$ax^2 + sx + p = ax^2 + mx + nx + p$
Trovare due numeri m ed n tali che: $m + n = s$ $m \cdot n = a \cdot p$ ed effettuare un raccoglimento parziale	$6x^2 + 5x - 4$ Devo trovare due numeri m ed n che sommati danno $+5$ e moltiplicati tra loro danno $6 \cdot (-4) = -24$. Tali numeri sono $+8$ e -3: $(+8) + (-3) = +5$ $(+8) \cdot (-3) = -24$ Sostituisco $+5x$ con $+8x - 3x$: $6x^2 + 5x - 4 = 6x^2 + 8x - 3x - 4 =$ ed, infine, effettuo il raccoglimento parziale: $= 2x \cdot (3x + 4) - 1 \cdot (3x + 4) = (2x - 1) \cdot (3x + 4)$