

Sistemi di equazioni. Metodo di Cramer.

Docente: Prof. Nicola Vigilante | **Classe:** Seconda I.T.T.

I principali metodi algebrici per risolvere i **sistemi di equazioni lineari** (equazioni di primo grado) sono quattro: **sostituzione**, **confronto**, **riduzione** (o addizione/sottrazione) e il **metodo di Cramer**. Il **metodo di Cramer** va utilizzato principalmente per risolvere sistemi di equazioni lineari quadrati (con un numero di equazioni uguale a quello delle incognite) che ammettono una e una sola soluzione (il sistema deve essere determinato!).

Come riconoscere se un sistema risulta determinato?

Considero un sistema in forma normale:
$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

Il sistema è determinato se il rapporto tra i coefficienti della x è diverso dal rapporto tra i coefficienti della y:

$$\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$$

Per utilizzare il Metodo di Cramer è necessario introdurre alcuni concetti sulle matrici. Una matrice è una tabella composta da un insieme di elementi disposti su due o più righe e colonne.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

Le matrici si classificano in due categorie:

- **Matrici quadrate.** Sono le matrici in cui il numero di colonne è uguale al numero di righe.

$$A_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$$

- **Matrici rettangolari.** Sono le matrici in cui il numero di colonne è diverso dal numero di righe.

$$A_{3 \times 2} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -1 \\ 4 & 6 \end{bmatrix} \quad A_{2 \times 3} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 6 \end{bmatrix}$$

La matrice si indica con una lettera maiuscola e gli elementi che la costituiscono sono individuati attraverso due indici, per esempio a_{ij} : il primo indice (i) indica la riga e il secondo (j) la colonna a cui appartiene l'elemento. Ad esempio per la matrice $A_{2 \times 2}$:

$$a_{11} = 2, \quad a_{12} = 6, \quad a_{21} = 1, \quad a_{22} = -3$$

A ogni matrice quadrata **A** di ordine **n** qualsiasi, è possibile associare un numero reale, detto **determinante** che indichiamo con **D** oppure **det A**.

Definizione

Il determinante di una matrice quadrata A (D) di ordine 2 (due righe e due colonne) è il numero che si ottiene come differenza fra il prodotto degli elementi della **diagonale principale** e il prodotto di quelli della **diagonale secondaria**.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \Rightarrow \det A = a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}$$

ESEMPIO: $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 7 \end{bmatrix} \Rightarrow \det A = 2 \cdot 7 - 3 \cdot 5 = 14 - 15 = -1$

Il **metodo di Cramer** è un procedimento algebrico per risolvere soprattutto i sistemi di equazioni lineari quadrati (con lo stesso numero di equazioni e di incognite) usando le **matrici** e i **determinanti**. Di seguito vi spiego i passi da seguire per utilizzare tale metodo:

1. È necessario che il sistema sia scritto in forma normale, con le **incognite** a sinistra dell'uguale ed i **termini noti** a destra dell'uguale.

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

2. Calcoliamo il **determinante D** del sistema prendendo solo i numeri (coefficienti) che stanno davanti alle incognite.

$$\text{Matrice dei coefficienti} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix} \Rightarrow D = a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1$$

Se $D \neq 0$, il sistema ha una sola soluzione e puoi andare avanti. **Se $D = 0$, il metodo di Cramer non si può applicare e il sistema sarà impossibile o indeterminato.**

3. Calcoliamo il **determinante dell'incognita x** (D_x) che si ottiene sostituendo la colonna dei **termini noti** alla colonna dei coefficienti di x:

$$D_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} = c_1 \cdot b_2 - c_2 \cdot b_1$$

4. Calcoliamo il **determinante dell'incognita y** (D_y) che si ottiene sostituendo la colonna dei **termini noti** alla colonna dei coefficienti di y:

$$D_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = a_1 \cdot c_2 - a_2 \cdot c_1$$

5. Calcoliamo le soluzioni del sistema mediante le seguenti formule:

$$x = \frac{D_x}{D} \quad ; \quad y = \frac{D_y}{D}$$

ESEMPIO

$$\begin{cases} 5x + y = -2 \\ 2x - y = -1 \end{cases}$$

Calcoliamo il determinante della matrice dei coefficienti $A = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$

$$D = \det A = 5 \cdot (-1) - 2 \cdot 1 = -5 - 2 = -7$$

Poiché $D \neq 0$ il sistema è determinato.

Calcoliamo:

$$D_x = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = -2 \cdot (-1) - (-1) \cdot 1 = 2 + 1 = 3$$

$$D_y = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = 5 \cdot (-1) - 2 \cdot (-2) = -5 + 4 = -1$$

Troviamo i valori di x ed y:

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{3}{-7} = -\frac{3}{7}$$

$$y = \frac{D_y}{D} = \frac{-1}{-7} = \frac{1}{7}$$

Il sistema ha come soluzione la coppia $\left(-\frac{3}{7}, \frac{1}{7}\right)$.