

Sistemi di equazioni. Metodi di risoluzione.

Docente: Prof. Nicola Vigilante | **Classe:** Seconda I.T.T.

Un sistema di equazioni è un insieme di due o più equazioni per le quali cerchiamo le soluzioni comuni, ossia i valori, da attribuire alle incognite, che verificano contemporaneamente tutte le equazioni.

Se consideriamo due equazioni lineari:

$$3x - 5y - 4 = 0$$

$$x + 2y = 6$$

Ciascuna delle due equazioni lineari considerate ha infinite soluzioni.

Perché si chiamano equazioni lineari?

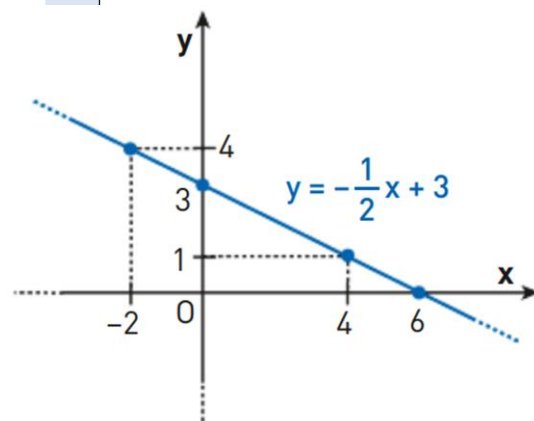
Le equazioni lineari sono equazioni in cui tutte le variabili compaiono sempre e solo con esponente pari ad 1 (sono di primo grado).

Non ci sono mai moltiplicazioni tra le incognite (come $x \cdot y$) o potenze superiori.

La loro rappresentazione grafica nel piano cartesiano è una linea retta.

Rappresentazione grafica dell'equazione: $x + 2y = 6$

X	-2	0	4	6
Y	4	3	1	0



Risolvere un sistema di due equazioni in due incognite significa chiedersi se esistono soluzioni comuni a entrambe, cioè se esistono coppie ordinate $(x; y)$ di valori che soddisfano **contemporaneamente** le due equazioni.

Le soluzioni comuni a tutte le equazioni sono le **soluzioni del sistema**.

Per indicare un sistema si scrivono le equazioni in colonna racchiuse da una parentesi graffa, per esempio:

$$\begin{cases} 3x - 5y - 4 = 0 \\ x - 2y = -1 \end{cases}$$

Come per le equazioni di primo grado (la soluzione è quel valore che, sostituito all'incognita x rende vera l'uguaglianza tra il primo e il secondo membro), se una coppia di numeri reali è soluzione del sistema, allora sostituendo i due numeri al posto delle corrispondenti incognite x ed y , in entrambe le equazioni del sistema si ottengono due uguaglianze vere.

Possiamo scrivere un **sistema di equazioni**, equivalente a quello dato, **in forma normale**, cioè nella forma:

$$\begin{cases} a_1x - b_1y = c_1 \\ a_2x - b_2y = c_2 \end{cases}$$

con $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$ numeri reali.

I valori a_1, b_1, a_2, b_2 , indicano, rispettivamente, i **coefficienti** delle incognite x e y delle due equazioni, i valori c_1, c_2 indicano i **termini noti**.

Un sistema di equazioni si dice:

- **determinato** se ha un numero finito di soluzioni;
- **impossibile** se non ha soluzioni;
- **indeterminato** se ha infinite soluzioni.

Di seguito, viene mostrata una tabella riepilogativa delle condizioni relative ai sistemi determinati, indeterminati e impossibili.

Sistema in forma normale	Determinato	Impossibile	Indeterminato
$\begin{cases} a_1x - b_1y = c_1 \\ a_2x - b_2y = c_2 \end{cases}$	$\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$	$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$	$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$
	Unica soluzione	Nessuna soluzione	Infinite soluzioni

Il Metodo di Sostituzione

$$\begin{cases} 2x - 3y + 12 = 0 \\ x + 4y - 5 = 0 \end{cases}$$

Ricaviamo x nella seconda equazione e sostituiamo la sua espressione nella prima:

$$\begin{cases} 2x - 3y + 12 = 0 \\ x = 5 - 4y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2 \cdot (5 - 4y) - 3y + 12 = 0 \\ x = 5 - 4y \end{cases}$$

Risolvi la prima equazione, che è nella sola variabile y , e sostituiamo il valore ottenuto nella seconda.

$$\begin{cases} 10 - 8y - 3y + 12 = 0 \\ x = 5 - 4y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -11y = -22 \\ x = 5 - 4y \end{cases}$$

$$\begin{cases} -11y = -22 \\ x = 5 - 4y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2 \\ x = 5 - 4 \cdot 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2 \\ x = -3 \end{cases}$$

Se in una delle due equazioni del sistema ricaviamo una delle incognite in funzione dell'altra e sostituiamo l'espressione ottenuta nell'altra equazione, otteniamo un sistema equivalente.

Tale sistema si dice **determinato** e la sua soluzione è la coppia di numeri reali $(-3, 2)$.

Riscrivendo il sistema in forma normale

$$\begin{cases} 2x - 3y = -12 \\ x + 4y = 5 \end{cases}$$

È dimostrabile che il sistema sia determinato confrontando i coefficienti delle incognite x ed y , cioè deve risultare:

$$\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$$

Tale condizione si può anche scrivere: $a_1 \cdot b_2 \neq a_2 \cdot b_1$

oppure : $a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1 \neq 0$

Sostituendo i coefficienti: $2 \cdot 4 \neq 1 \cdot 3 \Rightarrow 2 \cdot 4 \neq 1 \cdot 3 \Rightarrow 8 \neq 3$

Il Metodo del Confronto

Il metodo consiste nel ricavare la stessa incognita in entrambe le equazioni e uguagliare le espressioni ottenute. In questo modo otteniamo un'equazione che contiene una sola incognita.

$$\begin{cases} 4x + y = 2 \\ 3x - y - 12 = 0 \end{cases}$$

Ricaviamo y in entrambe le equazioni e uguagliamo le espressioni ottenute.

$$\begin{cases} y = 2 - 4x \\ y = 3x - 12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2 - 4x \\ 2 - 4x = 3x - 12 \end{cases}$$

RisolviAMO l'equazione in x e sostituiamo il valore ottenuto nella prima equazione:

$$\begin{cases} y = 2 - 4x \\ -4x - 3x = -12 - 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2 - 4x \\ -7x = -14 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2 - 4x \\ x = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 2 - 4 \cdot 2 \\ x = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2 - 8 \\ x = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -6 \\ x = 2 \end{cases}$$

La soluzione del sistema è (2; -6).

Il Metodo di Riduzione

$$\begin{cases} 3x - 4y = 27 \\ 2x + 8y = -14 \end{cases}$$

Per eliminare l'incognita y con il metodo di riduzione, applichiamo il secondo principio di equivalenza delle equazioni (**moltiplichiamo i due membri della prima equazione per 2**), in modo da ottenere un sistema equivalente nel quale i coefficienti di un'incognita siano uguali o opposti:

$$\begin{cases} 3x \cdot 2 - 4y \cdot 2 = 27 \cdot 2 \\ 2x + 8y = -14 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 6x - 8y = 54 \\ 2x + 8y = -14 \end{cases}$$

Se sommiamo o sottraiamo membro a membro due equazioni di un sistema e sostituiamo l'equazione ottenuta a una delle due equazioni di partenza, otteniamo un sistema equivalente.

Il metodo di riduzione è anche detto **Metodo di Addizione e Sottrazione**.

Sommiamo le equazioni membro a membro:

$$\begin{cases} 6x - 8y = 54 \\ 2x + 8y = -14 \\ \hline 8x + 0 = 40 \end{cases}$$

e risolviamo l'equazioni in x

$$8x + 0 = 40 \Rightarrow 8x = 40 \Rightarrow \frac{8x}{8} = \frac{40}{8} \Rightarrow x = 5$$

Sostituiamo $x = 5$ in una delle due equazioni e ricaviamo y :

$$\begin{aligned} &\begin{cases} x = 5 \\ 2x + 8y = -14 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 5 \\ 2 \cdot 5 + 8y = -14 \end{cases} \\ &\Rightarrow \begin{cases} x = 5 \\ 10 + 8y = -14 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 5 \\ 8y = -24 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = -3 \end{cases} \end{aligned}$$

La soluzione del sistema è $(5, -3)$.